数理解析研究所講究録
1137巻 2000年 19-25



# A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain (I)

北大 理学研究科　林 実樹廣 (Mikihiro HAYASHI)
北大 理学研究科　小林 保幸 (Yasuyuki KOBAYASHI)
名工大 (名誉教授)　中井 三留 (Mitsuru NAKAI)

$\Delta_0 : 0 < |z| < 1$ を穴あき単位円板とし, その中に数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $1 > c_n \searrow 0$ となるようにとる. $(\tilde{\Delta}_0, \Delta_0, \varphi)$ を限界のない2葉被覆面で分岐点が $\{\varphi^{-1}(c_n)\}_{n=1}^{\infty}$ であるものとする. このとき $H^\infty(\tilde{\Delta}_0) = H^\infty(\Delta_0)\circ\varphi$ となることが Myrberg によって示された. これはつまり $z \in \Delta_0 \setminus \{c_n\}$ に対し $\varphi^{-1}(z) = \{z^+, z^-\}$ と表すと, 任意の $f \in H^\infty(\tilde{\Delta}_0)$ に対し $f(z^+) = f(z^-)$ が成り立つということである. 次に $\Delta_0$ 内に小閉円板 $\Delta_n = \bar{\Delta}(c_n, r_n)$ を互いに交わらないようにとる. 但し, $\bar{\Delta}(c_n, r_n) = \{z : |z - c_n| \leq r_n\}$. 領域 $R = R(c_n, r_n) = \Delta_0 \setminus \cup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ を Zalcman 領域と呼ぶ. $\tilde{R} = \varphi^{-1}(R)$ とおくと, $(\tilde{R}, R, \varphi)$ は分岐点をもたない2葉被覆面である. $H^\infty(\tilde{R}) = H^\infty(R)\circ\varphi$ が成り立っているとき被覆面 $(\tilde{R}, R, \varphi)$ に対して Myrberg 現象が成り立つという.

[1] では, $H^\infty(R)$ に関する次の性質が Myrberg 現象の必要条件となることが示された.

$$f \in H^\infty(R),\ \lim_{z<0, z\to 0} f^{(m)}(z) = 0\ (m = 0, 1, 2, \cdots) \quad\Longrightarrow\quad f \equiv 0\,. \tag{1}$$

$H^\infty(R)$ が上の性質 (1) をもつとき, $z = 0$ において一致の定理が成り立つという. 特に $c_n = 2^{-n}$ とし, $r_n = 2^{-nN(n)}$ で正数列 $\{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を定めたとき, 一致の定理に関して次の定理 A,B が成り立つことが分かっている ([1]).

**定理 A** $R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ とすると

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z - 2^{-n}} \in H^\infty(R) \quad\Longleftrightarrow\quad \sup_{n\in\mathbf{N}} n\left(N(n) - \frac{n+1}{2}\right) < \infty\,.$$

**定理 B** $R = R(2^{-n}, 2^{-nN(n)})$ とする. $H^\infty(R)$ に対し $z = 0$ において一致の定理が成り立つならば, $\lim_{n\to\infty} N(n) = \infty$.

この2つの形の定理を用いることで, 一致の定理と Myrberg 現象の関係を調べることができる. これらの結果をより一般の点列 $c_n = 2^{-\nu_n}$ の場合に一般化できることが分かっ

た ([2]). ここでは定理 A, B の一般化について報告し, 一致の定理と Myrberg 現象の関係については引続き同題名 (II) で報告する.

以下 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は条件

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1 \tag{2}$$

を満たすもを考える. 一致の定理の十分条件を考える上で (1) を満たさない関数を構成したい. その候補が $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ である. 条件 (2) から, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ がいえるので $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ は $R$ 上収束していることが分かる. 次の補題は [2] で述べたものより仮定を弱くし, 証明も簡略化してある.

**補題 1** $p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$ が $R$ 上収束しているとする. このとき,

$$\lim_{z<0, z\to 0} p^{(m)}(z) = 0 \ (m = 0, 1, 2, \cdots) .$$

**証明** $g_k(z) := \prod_{n=k+1}^{\infty} \frac{z}{z-c_n}$, $f_k(z) := g_k(z) \prod_{n=1}^{k} \frac{1}{z-c_n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくと, 左半平面 $\mathrm{Re}\ z < 0$ で $|z| < |z - c_n|$ より, $g_k$ と $f_k$ はともに $\mathrm{Re}\ z < 0$ で有界である. また, $p(z) = z^k f_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ と表せる. 更に, ${}_mC_k$ を 2 項係数として

$$p^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\{z^{m+1} f_{m+1}(z)\} = \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \frac{(m+1)!}{(k+1)!} z^{k+1} f_{m+1}^{(k)}(z),$$

と表せる. このことから, 任意の $k, m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ に対して $f_k^{(m)}(z)$ が $[-1/2, 0)$ 上有界になることを示せば,

$$\lim_{z<0, z\to 0} p^{(m)}(z) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

がいえる. $z \in [-1/2)$ と $k, m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ に対し, $D = \{z : |z + 1/2| < 1/2\}$ とおくと

$$\begin{aligned} |f_k^{(m)}(z)| &= \left| \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\zeta^{m+1} f_{k+m+1}(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{m!}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial D} |f_{k+m+1}(\zeta)| \int_{\partial D} \left| \frac{\zeta}{\zeta - z} \right|^{m+1} |d\zeta| . \end{aligned}$$

ここで, 写像 $\varphi_z(\zeta) = \zeta/(\zeta - z)$ を考えると, $\varphi_z(\partial D)$ は, 中心 $1/2(1+z)$ 半径 $1/2(1+z)$ の円であることが分かる. よって,

$$\sup_{\zeta \in \partial D, z \in [-1/2, 0)} \left| \frac{\zeta}{\zeta - z} \right| = 2 .$$

従って、$f_k^{(m)}(z)$ は $[-1/2, 0)$ 上有界である　□

よって, あとは $p(z)$ が $R(c_n, r_n)$ 上有界であることがいえれば, (1) を満たさない関数が構成できたことになる. しかし, $p(z)$ の有界性は小閉円板の半径 $r_n$ に依存するので, 次はこれを考察する. 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対応して, 数列 $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}, \{N(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を $c_n = 2^{-\nu_n}, r_n = 2^{-\nu_n N(n)}$ で定義する. $\{c_n\}$ は狭義単調減少列で 0 に収束することから, $\{\nu_n\}$ は狭義単調増加列で $\lim_{n\to\infty} \nu_n = \infty$ となっている. また条件 (2) は次と同値である.

$$\liminf_{n\to\infty}(\nu_{n+1} - \nu_n) > 0 . \tag{3}$$

前述の定理 A は次のように一般化される.

**定理 1** $R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ とする. このとき,

$$p(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z - 2^{-\nu_n}} \in H^{\infty}(R) \iff \sup_{n\in\mathbf{N}} \nu_n (N(n) - \nu_n^*) < \infty .$$

ここで $\nu_n^* := n - \dfrac{\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}}{\nu_n}$.

**証明** 十分性の証明の概略のみを記す. $M_n := \max_{z\in\partial\Delta_n} |p(z)|$ とおくと, $\sup_{z\in R} |p(z)| = \sup_n M_n$ である.

$$\begin{aligned}
M_n &= \max_{z\in\partial\Delta_n} |p(z)| \le \prod_{m=1}^{\infty} \max_{z\in\partial\Delta_n} \left| \frac{z}{z - c_m} \right| \\
&= \prod_{m=1}^{n-1} \max_{z\in\partial\Delta_n} \left| \frac{z}{z - c_m} \right| \cdot \frac{c_n + r_n}{r_n} \cdot \prod_{m=n+1}^{\infty} \max_{z\in\partial\Delta_n} \left| \frac{z}{z - c_m} \right| \\
&= \left( \prod_{m=1}^{n-1} \frac{c_n + r_n}{c_m - (c_n + r_n)} \right) \cdot \frac{c_n + r_n}{r_n} \cdot \prod_{m=n+1}^{\infty} \left( 1 + \frac{c_m}{c_n - r_n - c_m} \right) \\
&= \frac{(c_n + r_n)^n}{r_n} \prod_{m=1}^{n-1} \left( \frac{1}{c_m} \cdot \frac{1}{1 - (1 + r_n c_n^{-1}) c_n c_m^{-1}} \right) \prod_{m=n+1}^{\infty} \left( 1 + \frac{c_m c_n^{-1}}{(1 - r_n c_n^{-1}) - c_m c_n^{-1}} \right) \\
&= (1 + r_n c_n^{-1})^n \cdot \frac{c_n{}^n}{r_n c_1 \cdots c_{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1}{1 - (1 + r_n c_n^{-1}) c_n c_m^{-1}} \\
&\qquad\qquad \times \prod_{m=n+1}^{\infty} \left( 1 + \frac{c_m c_n^{-1}}{(1 - r_n c_n^{-1}) - c_m c_n^{-1}} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで条件 (2) より $0 < \delta < 1$ と $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n_0 < k < \ell$ ならば $c_{k+1} c_k^{-1} < \delta$ 更に, $c_\ell c_k^{-1} < \delta^{\ell - k}$ となる. このことを用いて次の 3 式を得る.

$$\sup_n (1 + r_n c_n^{-1})^n < \infty$$

$$\sup_n \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1}{1 - (1 + r_n c_n^{-1}) c_n c_m^{-1}} < \infty$$

$$\sup_n \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{c_m c_n^{-1}}{(1 - r_n c_n^{-1}) - c_m c_n^{-1}}\right) < \infty .$$

従って, $\sup_n M_n < \infty$ となるためには (4) において$\sup_n \dfrac{c_n{}^n}{r_n c_1 \cdots c_{n-1}} < \infty$ であれば十分であることが分かる. これをかきかえて$\sup_n \nu_n(N(n) - \nu_n^*) < \infty$ を得る. □

与えられた 中心列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $p(z) \in H^{\infty}(R(c_n, r_n))$ であるように小閉円板の半径 $r_n$ をどれだけ小さく, 言い換えれば $N(n)$ をどれだけ大きくできるかという視点で考えたとき, 上の定理は $N(n)$ の大きさは中心列から決まる量 $\nu_n^*$ で近似されるということをいっている. そこで数列 $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ の増大度について調べてみると.

**命題 1**

(a) 任意の $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ は狭義単調増加列であり, $\nu_n^* \leq n$, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^* = \infty$ を満たす.

(b) $0 < \sigma_n < 1$ なる任意の数列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\nu_n^* \geq \sigma_n \cdot n$ $(n \in \mathrm{N})$ を満たす $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ が自然数列としてとれる.

(c) $0 < \beta_n \nearrow \infty$ なる任意の数列 $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{N}$ とその部分列 $\{\nu_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在し, $\nu_{n_k}^* < \beta_{n_k}$ $(k \in \mathrm{N})$ となる.

証明 (a) $\{\nu_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ が狭義単調増加であることは次の計算から分かる.

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}^* - \nu_n^* &= n + 1 - \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_n}{\nu_{n+1}} - n + \frac{\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}}{\nu_n} \\
&= 1 - \frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} + (\nu_1 + \cdots + \nu_{n-1})\left(\frac{1}{\nu_n} - \frac{1}{\nu_{n+1}}\right) \\
&> 0 .
\end{aligned}$$

また, 任意の $m \in \mathrm{N}$ に対して $n(m) \in \mathrm{N}$ が存在し, $n \geq n(m)$ ならば $\nu_n > 2\nu_{m-1}$ となる. 従って, $n \geq n(m)$ ならば $\nu_j/\nu_n < 1/2$ $(j = 1, \cdots, m-1)$. よって,

$$\begin{aligned}
\nu_n^* &= 1 + \left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{\nu_{m-1}}{\nu_n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} m .
\end{aligned}$$

$m$ は任意であったから, $\lim_{n\to\infty} \nu_n^* = \infty$.

(b) $\{\nu_\ell\}_{\ell=1}^{n}$ までとれたとする. $\nu_{n+1}$ を $\nu_n/\nu_{n+1} < 1-\sigma_{n+1}$ を満たすようにとれば,

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}^{*} &= 1+\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_{n+1}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}}\right) \\
&\geq (n+1)\left(1-\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}}\right) \\
&> (n+1)\sigma_{n+1}.
\end{aligned}$$

(c) $n_1 < \cdots < n_{\ell-1}$ と $\{\nu_n\}_{n=1}^{n_{\ell-1}}$ までとれたとして, 以下のように $n_\ell\,(> n_{\ell-1})$ と $\{\nu_n\}_{n=n_{\ell-1}+1}^{n_\ell}$ を定めればよい. $\varepsilon > 0$ を固定しておく. $\beta_n \nearrow \infty\ (n\to\infty)$ であるから

$$n_\ell > n_{\ell-1} \quad \text{かつ} \quad \beta_{n_\ell} > n_{\ell-1}+1+\varepsilon$$

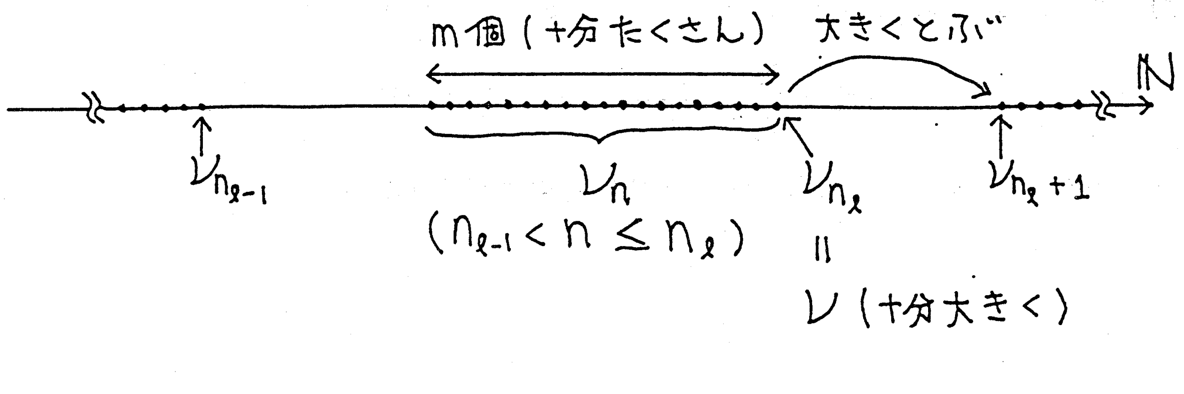
を満たすように $n_\ell \in \mathrm{N}$ がとれる. ここで, $m = n_\ell - n_{\ell-1} - 1$ に対し $\nu > \max\{m, m^2/\varepsilon\}$ を満たす $\nu \in \mathrm{N}$ をとると,

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\nu-m}{\nu}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu-2}{\nu}\right)+\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right) \\
&< m\left(1-\frac{\nu-m}{\nu}\right) = \frac{m^2}{\nu} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

そこで $n_{\ell-1} < n \leq n_\ell$ なる $n$ に対して $\nu_n$ を $\nu_n = \nu-(n_\ell-n)$ で定義すれば,

$$\begin{aligned}
\nu_{n_\ell}^{*} &= 1+\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_{n_\ell}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_{n_{\ell-1}}}{\nu_{n_\ell}}\right) \\
&\quad +\left(1-\frac{\nu_{n_{\ell-1}+1}}{\nu_{n_\ell}}\right)+\cdots+\left(1-\frac{\nu_{n_\ell-1}}{\nu_{n_\ell}}\right) \\
&< n_{\ell-1}+1+\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

従って, $\nu_{n_\ell}^{*} \leq n_{\ell-1}+1+\varepsilon < \beta_{n_\ell}$. 数列 $\{\nu_n\}$ の模式図は下に示す. □



この命題により $N(n)$ について次のことが分かる. (a) $N(n)$ は常に $N(n)\to\infty$ ($n\to\infty$) となるようにとれ, 最大の増大度は $n$ である. (b) 適当な中心列に対しては $N(n)$ はいくらでも $n$ に近くとれる. (c) 中心列によっては $N(n)$ は非常にゆっくりとしか増加できない. 以下, 具体例でこのことを確かめてみる.

例 $\nu_n = n$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{1+\cdots+(n-1)}{n} = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} .$$

これは定理 A そのものである. $\nu_n = a^n$ $(a>1)$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{a+\cdots+a^{n-1}}{a^n} = n - \frac{a(a^{n-1}-1)}{a^n(a-1)} \approx n - \frac{1}{a-1} .$$

$\nu_n = n!$ とすると,

$$\nu_n^* = n - \frac{1!+\cdots+(n-1)!}{n!} < n - \frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!}{n!} = n - \frac{2}{n} .$$

これは命題 1(b) を説明する例である.

最後に定理 の一般化について述べる. 尚, この証明はもとのものより若干簡単なものになっている.

**定理 2** $R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)})$ とする. $H^\infty(R)$ に対し $z=0$ において一致の定理が成り立つならば, $\lim_{n\to\infty} N(n) = \infty$.

**証明** 対偶を示す. $\liminf\limits_{n\to\infty} N(n) < \infty$ と仮定する. このとき, 正定数 $\mu$ と自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ $(n_k < n_{k+1})$ が存在して, $N(n_k) \le \mu$ $(k \in \mathrm{N})$ となる. ここで $\nu'_k := \nu_{n_k}, N'(k) := \mu$ とおくと, 次の包含関係が成り立つ.

$$R = R(2^{-\nu_n}, 2^{-\nu_n N(n)}) \subset R(2^{-\nu_{n_k}}, 2^{-\nu_{n_k} N(n_k)}) \subset R(2^{-\nu'_k}, 2^{-\nu'_k N'(k)}) =: R' .$$

命題 1 の (a) より, $\sup_{k\in\mathrm{N}} \nu'_k(N'(k) - \nu'^*_k) < \infty$ であるから, 定理 1 より

$$q(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{z}{z - 2^{-\nu'_k}} \in H^\infty(R') \subset H^\infty(R) .$$

従って $H^\infty(R)$ に対し $z=0$ において一致の定理は成り立たない. □

## References

[1] M. Hayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon*, J. d'Analyse Math. **76** (1998), 109-136.

[2] M. Hayashi, Y. Kobayashi and M. Nakai, *A uniqueness theorem and the Myrberg phenomenon for a Zalcman domain*, preprint.